Essai d'explication des Equations de Maxwell

Werner Tobler (HB9AKN), Chemin de Palud 4, 1800 Vevey

Introduction

Les équations de Maxwell ont une solide réputation de complexité et lorsqu'on les évoque, on ne lit souvent qu'un profond scepticisme chez notre interlocuteur. On sent bien pourtant qu'elles constituent la clé de voute de tout l'édifice électromagnétique et c'est étonnant de constater à quel point elles restent ignorées de la plupart des gens s'occupant d'électromagnétisme. Sont-elles mal enseignées ou pas enseignées du tout dans les écoles par manque de temps ou par peur de la complexité? Ou alors, on nous montre le plus souvent des parcelles de vérité avec des petites formules prêtes à l'emploi servant à résoudre rapidement des problèmes. Que dire des ouvrages très savants, parfaitement adaptés d'ailleurs à ceux qui ont le bagage nécessaire, et qui sont encore sur les bancs d'école. Ces livres proposent souvent des équations indéchiffrables, pour celui qui n'est plus à l'école, et qui, par conséquent ne peut pas avoir recours à l'assistance d'un professeur. Ces ouvrages ne sont souvent pas conçus pour un autodidacte, pour qui ils sont sans explications réelles, comme si ces fameuses équations ne devaient être que la propriété de quelques initiés. Il est vrai que ces ouvrages accompagnent généralement des cours qu'il est presque impératif de suivre si l'on veut comprendre quelque chose. C'est bien dommage car une équation n'est somme toute qu'une expression remplaçant toute une phrase en bon français. Ce n'est qu'un langage plus rapide et plus universel pour exprimer un phénomène. D'autre part les programmes scolaires étant de plus en plus surchargés, beaucoup de notions de physique même fondamentales sont sacrifiées sur l'autel de l'efficacité. Mais l'expérimentateur qui se pose des questions voudra ultérieurement assouvir sa soif de connaissances et nous espérons pouvoir l'aider dans cette démarche.

Nous le savons, le monde des radio-amateurs est très hétérogène puisqu'il est composé aussi bien de professeurs d'Université et autres prix Nobel que de modestes ouvriers et employés avides de connaissances, et intéressés par les sciences et les techniques. J'ai donc longtemps hésité d'écrire cet article forcément un peu théorique craignant de lasser certains de mes lecteurs surtout portés sur les QSO's et sur le côté pratique des choses. Mais nous savons que parmi eux certains s'intéressent aux phénomènes physiques, aiment l'abstraction et comprendre leur environnement. Ils attendaient peut-être comme moi l'opportunité de pouvoir progresser dans ce domaine. De plus, j'ai eu la main heureuse et suis tombé sur une publication commémorative de la naissance de James Clerk Maxwell (voir la bibliographie). Celle-ci contenait enfin, à mes yeux, une explication claire de ces fameuses équations, sans faire appel à un grand bagage mathématique, mais en utilisant toutes les ressources de la langue. En effet, si Napoléon disait qu'un dessin vaut mieux qu'un grand discours, pour ce qui nous intéresse ici, la méthode utilisée est inverse puisque nous partirons des expressions algébriques, qui sont aussi une forme alphanumérique de représentation de la pensée, analogue à un dessin, que l'auteur a converti en un long discours en utilisant toutes les ressources de la langue. Celà aurait sans doute horrifié Napoléon, comme certainement les physiciens et autres ingénieurs pour qui les expressions algébriques sont une énorme simplification. Mais pourquoi ne pas utiliser des moyens d'expression compréhensibles par le non initié, comme par exemple les ressources de la langue et du raisonnement, lorsqu'il s'agit d'enseigner, au lieu des équations aux dérivées partielles, pour parvenir à un niveau de compréhension identique? C'est le grand mérite de Mr Gérard Chevalier d'avoir pensé à cette opportunité. Bravo donc à cet auteur français qui sut utiliser sa langue, et qui eut l'idée de marier la subtilité et la richesse de celle-ci, avec la rigueur toute mathématique des fondements de l'électromagnétisme. Je ne pouvais que faire profiter le lecteur de ce procédé merveilleux.

Le grand savant anglais James Clerx Maxwell écrivit ses quatre équations en 1868 et ces modestes quatre lignes résument à elle-seules l'électricité, le magnétisme et la lumière. Quelle puissance de raisonnement se cache derrière ces symboles!

Préliminaires:

Nous allons progressivement, comme l'a fait la publication dont nous nous sommes largement inspiré (voir la bibliographie) introduire et préciser des notions utiles pour la compréhension de l'exposé. Ainsi, le lecteur découvrira peut-être un paysage scientifique certainement nouveau qui lui permettra, du moins nous l'espérons, d'atteindre un niveau de compréhension suffisant pour accéder à ces fameuses équations. Nous commencerons par établir un glossaire des mots utilisés afin d'éviter toute confusion. Nous éviterons en particulier d'utiliser deux mots différents pour désigner la même chose.

Un champ est une grandeur physique qui prend une valeur en tout point de l'espace. Etant à trois dimensions, il faudra faire appel

aux trois axes x, y, z. Il faudra de plus faire intervenir le temps pour permettre au point repéré dans l'espace d'évoluer en fonction du temps. On aura donc l'écriture suivante:
P (x, y, z, t)
pour désigner le point **P** à l'instant t aux coordonnées x, y, z.
Rappelons l'expérience de Faraday qui a soupoudré de limaille de fer une feuille de papier posée sur les pôles d'un aimant permanent. La limaille de fer s'organise et dessine des lignes courbes qui, partant d'un pôle de l'aimant, s'en ira rejoindre l'autre pôle. On voit ainsi la direction du champ, ainsi que son intensité. Les lignes sont espacées quand le champ est faible, serrées quand il est fort. Cette représentation est trop simple, car elle ne permet de visualiser que le plan supportant la limaille de fer, alors qu'il faudrait prendre en compte tout l'espace. De plus, cette représentation est statique et ne nous donne que ce que donnerait un instantanné photographique.
Un scalaire est un simple chiffre désignant une valeur.
Un vecteur est une représentation dans l'espace d'une valeur. Celui-ci comporte:
- Le module ou longueur du vecteur qui est la représentation de l'importance de la valeur.
- Le sens du vecteur indiquant dans quelle direction s'exerce la valeur.
- L'argument ou l'angle qui positionne le vecteur dans l'espace par rapport à un référentiel.
- L'origine du vecteur qui indique à quel point se rapporte celui-ci dans l'espace.

Ainsi, on peut considérer de l'eau qui s'écoule et s'intéresser à la vitesse de cet écoulement en tout point. On obtient ainsi un champ de vecteurs dont chacun représente la vitesse en un point, en grandeur et en direction. C'est un **champ vectoriel**.

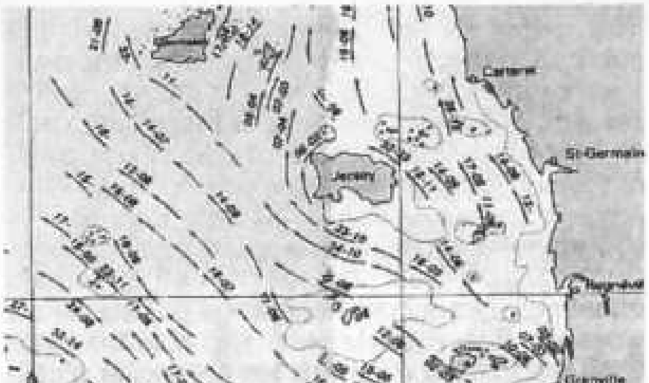

Figure 1: *Carte des courants de marée, trois heures après la pleine mer de Saint-Malo.*

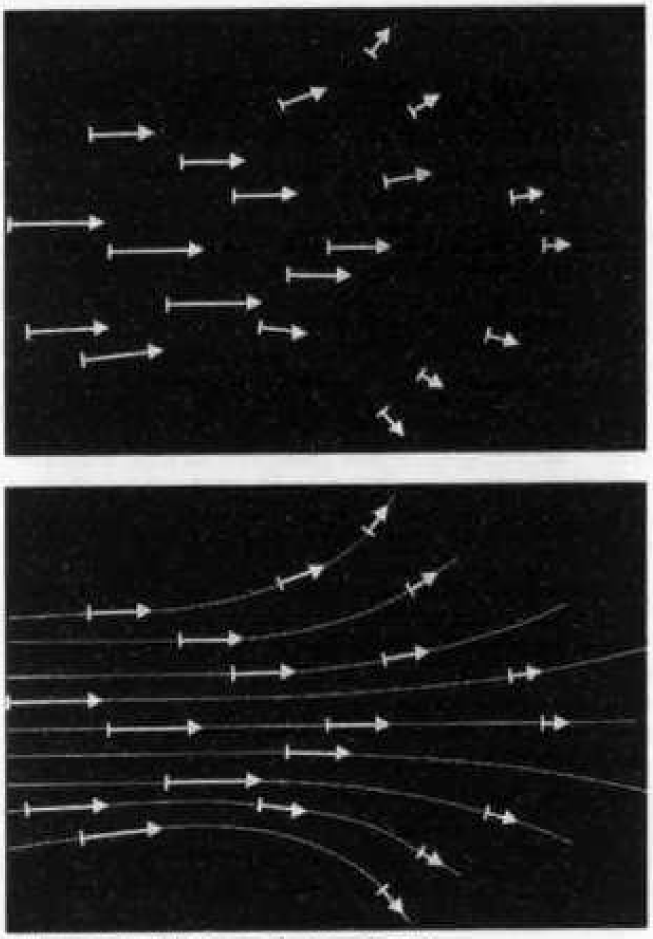
Figure 2: Champ de vecteurs
Considérons un écoulement de fluide. A un point de l'espace, on peut associer une vitesse: celle qu'a une molécule d'eau lorsqu'elle se trouve en ce point. Sur le dessin supérieur, le point de départ de chaque flèche, sa longueur et sa direction définissent un vecteur-vitesse. Par commodité, on n'a représenté qu'un plan de l'espace et seulement quelques vecteurs; mais Faraday et Maxwell adoptent une vision continue des phénomènes. En attribuant un vecteur à tous les points de l'espace, ils donnent naissance à un nouvel être de la physique mathématique: le champ vectoriel. Le dessin inférieur montre une représentation géométrique d'un champ de vecteurs: les lignes de champ sont, en tout point, tangentes au vecteur du champ (ici, un champ de «vitesses»). Par ailleurs, la densité des lignes de champ peut donner une idée de l'intensité du vecteur-champ: rapprochées, elles indiquent un champ intense...

Les champs électriques et magnétiques peuvent être représentés par des champs vectoriels. Ceux-ci offrent l'avantage de pouvoir être additionnés entre eux par simple addition vectorielle. On peut même imaginer qu'il y ait plusieurs champs au même point de l'espace donc plusieurs vecteurs ayant la même origine, mais pas forcément la même direction, ni la même valeur (voir figures 1, 2 comme illustrations de champs de vecteurs).

Notion de flux

Un flux caractérise «ce qui s'écoule» perpendiculairement à travers une surface par unité de temps. C'est donc un débit.

Considérons un simple tuyau droit étanche dans lequel s'écoule de l'eau, et plus spécialement une section de celui-ci (voir figure 3A). La seule donnée de la vitesse de l'eau à travers cette surface suffit pour déduire l'ensemble du champ de vitesses dans tout le tuyau.

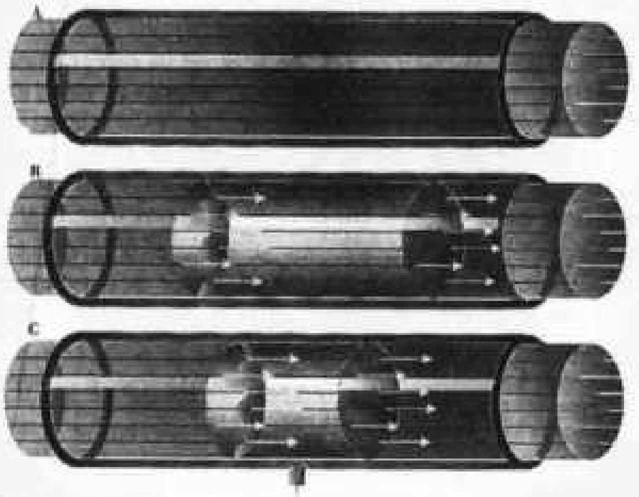

Figure 3: Mathématiser une fuite...

De l'eau s'écoule régulièrement dans un tuyau droit et étanche (A). Installons, par la pensée, deux sections quelconques (en gris) dans ce tuyau. Appliquons la définition du flux de vitesses (voir ci-contre) à la surface fermée particulière constituée par ces deux sections et la surface interne du tuyau. Si le tuyau ne fuit pas (B), le flux est nul, quelles que soient les positions des sections grises. En revanche, si un trou est percé (C), on trouvera des cas pour lesquels le flux de vitesses à travers la surface fermée ne sera pas nul. Où l'on perçoit comment rendre compte d'un fait physique (l'absence d'une fuite) par une notion mathématique (le flux de vitesses à travers n'importe quelle surface fermée est nul)...

Supposons maintenant, que le tuyau comporte une fuite. Localement, le champ de vitesse sera perturbé et se comportera de manière différente. Imaginons maintenant deux sections situées à deux endroits quelconques du tuyau, nous avons ainsi formé une surface fermée, formée des deux sections et de la surface interne du tuyau. Un flux de vitesse «entre» en traversant la première section, un second flux en «ressort» en traversant la seconde section. Si le tuyau est en bon état, le flux à travers la surface interne du tuyau est nul. Nous définirons le flux à travers la surface fermée comme le bilan des flux à travers les différentes surfaces qui la composent. Les flux entrants seront considérés comme positifs, les flux sortants négatifs. Le bilan est nul (figure 3B). Perçons maintenant un trou dans le tuyau situé entre les deux sections. Le bilan des flux de vitesses à travers les diverses surfaces n'est plus nul (figure 3C). Nous disposons ainsi d'une méthode générale applicable à un champ de vitesse, donc à un champ vectoriel. Or, les champs électriques et magnétiques sont eux aussi des champs vectoriels. C'est d'ailleurs leur seul point commun avec l'exemple des fluides, car il n'y a avec eux ni écoulement de matière ni vitesse. L'analogie fonctionne cependant et l'on parlera d'un «flux du champ électique». On pourra ainsi observer s'il y a des «fuites» vers l'extérieur d'une surface fermée imaginaire placée dans un tel champ. **La notion de flux associe un champ vectoriel et une surface fermée.**

Depuis l'expérience de Faraday, on sait que la poudre de fer autour d'un aimant indique les lignes de champ, qui en chaque point sont tangentes au vecteur du champ magnétique. On voit ici que la représentation vectorielle fait entrer la mathématique dans la représentation géométrique de Faraday. **Ces lignes de champ décrivent des boucles fermées.** Il nous faut donc mettre au point un second outil mathématique qui associera un champ vectoriel avec des boucles fermées (voir figure 4A).

Repartons d'un champ de vitesse décrivant l'écoulement d'un liquide mais cette fois sans tuyau, le liquide ayant un volume plus large à sa disposition. Plaçons par imagination dans cet écoulement une boucle tubulaire de forme quelconque transparente mais de section constante. Supposons qu'à un instant donné, on solidifie le liquide partout sauf dans la boucle imaginaire (voir figure 4). Le liquide est figé à l'extérieur mais peut circuler dans la boucle grâce à son impulsion. Déjà avant la solidification, si le champ de vitesse était organisé de manière adéquat, on constatera effectivement que le liquide circule dans la boucle tubulaire (voir figures 4B, 4C, 4D).

Définition:

On appelera **circulation** le produit de la vitesse du liquide dans le tube de la boucle par la circonférence de celle-ci. Ainsi une petite boucle parcourue à une grande vitesse sera

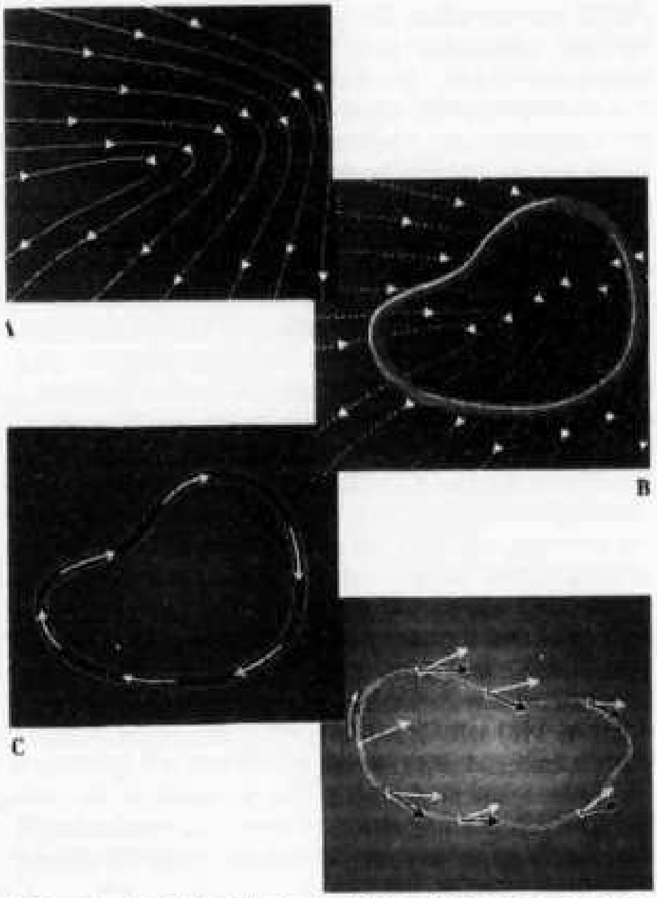

Figure 4: Circulation d'un champ de vecteurs
En A, un écoulement de fluide représenté par ses lignes de champ. En B, on installe un tube fermé transparent, de forme arbitraire, dans ce «champ de vitesses» qu'il faut imaginer en trois dimensions. En C, on fait l'expérience de pensée suivante: on «solidifie» l'ensemble du fluide sauf à l'intérieur du tube. Si le champ de vitesses était organisé convenablement, le fluide circule. En D, se trouve illustrée la définition mathématique d'une notion, abondament utilisée par Maxwell, liée à cette idée de circulation. La circulation d'un champ de vecteurs est ainsi égale au produit de la composante tangentielle moyenne du vecteur (en noir) par la circonférence de la boucle (la donnée d'un sens privilégié de circulation permet de définir des contributions positives et négatives).

comparable à une grande boucle parcourue à petite vitesse. Rapporté au champ magnétique l'intérêt de la notion de circulation est immédiat. Au voisinage immédiat d'un aimant le champ magnétique s'organise en petites boucles fermées où précisément le champ magnétique est intense, tandis qu'à mesure qu'on s'éloigne de l'aimant les boucles s'allongent et l'intensité du champ faiblit.

Ainsi, ces deux notions, le flux et la circulation d'un champ de vecteurs, suffisent à décrire d'un seul coup toutes les lois de l'électricité et du magnétisme. Dans la formulation des équations de Maxwell données plus loin, ces deux notions sont en fait dissimulées derrières les différentes utilisations du symbole ∇ (nabla). Contentons nous donc d'exprimer les équations de Maxwell à l'aide de nos seules notions de flux et de circulation.

Continuation à suivre